

文章编号:1000-8055(2013)07-1659-07

基于二代小波的轨迹优化节点自适应加密

丰志伟¹, 张青斌¹, 唐乾刚¹, 张永合²

(1. 国防科学技术大学 航天科学与工程学院, 长沙 410073;

2. 中国科学院 上海微系统与信息技术研究所, 上海 200050)

摘 要: 针对采用直接法求解轨迹优化问题中精度和效率之间的矛盾, 提出了基于二代小波轨迹优化节点自适应加密. 采用 RK(Runge-Kutta)离散方法将原轨迹优化问题转化为非线性规划问题, 并采用成熟的非线性规划算法求解. 对控制或状态函数进行小波变换得到小波系数, 基于小波系数和二分节点的对应关系, 根据小波系数的幅值确定下一个迭代步所使用的节点并进行序列优化. 算例结果表明: 通过设置合适的小波系数阈值, 采用较少的时间离散节点即可使优化结果达到预定的精度. 与高斯伪谱法软件相比, 节点个数大约减少 10%, 最优指标的精度大约提高 1 个数量级.

关 键 词: 轨迹优化; 节点自适应; 直接法; 二代小波; 多分辨分析

中图分类号: V412.4⁺2

文献标志码: A

Node adaptive refinement for trajectory optimization based on second-generation wavelets

FENG Zhi-wei¹, ZHANG Qing-bin¹, TANG Qian-gang¹, ZHANG Yong-he²

(1. College of Aerospace Science and Engineering,

National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. Shanghai Institute of Microsystem and Information,

Chinese Academy of Science, Shanghai 200050, China)

Abstract: A mesh adaptive refinement method for solving trajectory optimization problem by using direct method based on second-generation wavelets was proposed to deal with the conflict between accuracy and efficiency. The original trajectory optimization problem was transformed into a nonlinear programming problem that was solved by standard nonlinear programming codes. Then the wavelet transformation of control or state function was performed, and the wavelet coefficients were obtained. A new node could be determined based on the magnitude of coefficients and the relationship between wavelet coefficients and dyadic nodes. The results demonstrate that the proposed method can balance accuracy of the solution and speed of computations by setting appropriate threshold of wavelet coefficients. Compared with the Gauss pseudospectral method software package, the number of nodes are reduced by 10% approximately, and the optimality accuracy is increased by an order of magnitude by using the method.

Key words: trajectory optimization; node adaptive; direct method; second generation wavelets; multi-resolution analysis

收稿日期: 2012-11-09

网络出版地址: http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20130711.1810.201307.1659_003.html

基金项目: 国家自然科学基金(11272345)

作者简介: 丰志伟(1984—), 男, 山西襄汾人, 博士生, 研究方向为飞行器轨迹优化. E-mail: fzwuudt@163.com

轨迹优化问题数值解法在航空航天领域具有广泛的应用,如飞行轨迹优化、导弹制导、轨道转移、航天器姿态机动等.对于这些非线性的最优控制问题,通常采用直接法求解,即采用参数化方法将最优控制问题转化为非线性规划(nonlinear programming, NLP)问题,并通过数值方法求解非线性规划问题来获得原最优控制问题的近似解^[1].为了达到一定的求解精度,通常需要自适应分配节点,进行多次迭代.

针对直接法中求解精度和计算效率的矛盾,不同的研究者提出了若干节点自适应算法. Betts^[2]通过求解整数规划问题来自动确定新的节点分布,该整数规划问题的目标是:最大离散误差最小. Ross 和 Fahroo^[3]提出了伪谱结点方法(pseudospectral knotting methods, PKM),该方法在控制函数不连续处将原轨迹优化问题分成两段,并增加相应的连接约束.在每一段中,分别采用伪谱法来求解. Darby 等^[4]基于谱方法求解偏微分方程中的 hp 节点自适应法提出求解轨迹优化问题的 hp 节点自适应伪谱法,将时间区间按照一定的准则分为多个子区间.该方法首先通过全局伪谱法近似状态和控制变量,接下来基于迭代方法确定子区间的个数、长度和每个子区间中采用的正交多项式的阶数.上述方法的基本思想都是基于局部积分或插值误差来进行节点的重新分布.同时,另外一类方法是根据控制或状态函数的连续性来进行节点自适应,即在函数变化剧烈(平缓)的地方来加密(减少)节点,如 Zhao 和 Tsiotras^[5]提出的密度函数法,根据所选择的密度函数来自动重新分配节点.

小波自适应法属于第二类方法,在求解偏微分方程中应用广泛.小波函数具有良好的时间/频率局部特性,基于小波多尺度分析的非线性逼近算法较适合于表示含有局部奇异或突变的函数. Vasilyev 等^[6]提出了求解偏微分方程的二代小波配点法用于构建时间迭代步的非均匀空间节点,在捕捉函数局部突变方面取得了较好的效果.本文将该算法应用于轨迹优化问题求解中节点的自适应调整.在每次优化完成之后,对控制或状态函数进行小波变换,根据其小波系数的幅值自动确定下一次优化的节点,并进行序列优化.

本文首先介绍了用于轨迹优化的非均匀 RK 离散方法,从而将轨迹优化问题转化为非线性规划问题.然后阐述了小波自适应配点法,在一次优化完成之后,基于该算法确定下一次优化的非均

匀节点,并依次进行优化直到满足要求的精度.最后对卫星姿态机动问题进行了优化计算,结果表明本文算法具有较强的适用性,对工程应用具有一定的参考价值.

1 轨迹优化问题与离散方法

目前求解轨迹优化问题的数值方法主要有2种:间接法和直接法^[7].间接法基于变分原理和 Pontryagin 极大值原理,将原轨迹优化问题转化为 Hamilton 边值问题(HBVP),然后通过数值方法求解.间接法的主要优点是得到的解较精确并满足1阶最优条件.但是由于其收敛半径非常小,协(伴随)状态的初始值不易给出,限制了其工程应用.而直接法则将状态变量和控制变量对时间离散化,将原始优化问题转化为非线性规划问题.

RK 离散方法由于其精度较高,在常微分方程的数值求解中应用广泛,因而也用于早期的间接和直接打靶法中并逐渐用于控制/状态参数化方法中.由于 RK 法不要求节点固定,因而易于进行节点自适应调整.

1.1 轨迹优化问题

考虑如下轨迹优化问题:确定控制函数 $u(t) \in \mathbf{R}^m$ (和时间 t_0, t_f),使得如下性能函数最小

$$J = F(\mathbf{x}_0, t_0; \mathbf{x}_f, t_f) \quad (1)$$

满足状态方程

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t], t \in [t_0, t_f] \quad (2)$$

边界条件

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}_0, t_0; \mathbf{x}_f, t_f) = 0 \quad (3)$$

路径约束

$$\mathbf{C}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \leq 0, t \in [t_0, t_f] \quad (4)$$

其中初始状态 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ 、结束状态 $\mathbf{x}_f = \mathbf{x}(t_f)$. 这里假设初始时间 t_0 固定,结束时间 t_f 固定或自由.

对于性能函数含有积分指标的问题和自由时间问题,均可以通过引入附加状态转化为固定时间问题.

为了便于程序实现,通过变换 $\tau = (t - t_0)/(t_f - t_0)$ 将时间区间归一化,即 $\tau \in [0, 1]$. 变换后式(1)~式(4)分别转化为

$$J = F(\mathbf{x}_0, 0; \mathbf{x}_f, 1) \quad (5)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau) = \Delta t \cdot \mathbf{f}[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau], \tau \in [0, 1] \quad (6)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}_0, 0; \mathbf{x}_f, 1) = 0 \quad (7)$$

$$\mathbf{C}[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau] \leq 0, \tau \in [0, 1] \quad (8)$$

其中 $\Delta t = t_f - t_0$.

1.2 Runge-Kutta 离散方法与非线性规划问题

不失一般性,假设状态量和控制量在一组非均匀时间点 $T = \{\tau_i; \tau_i \in [0, 1]\}$ (下标 i 表示时间点序号) 上进行离散,则状态方程离散的 q 级 Runge-Kutta 离散方法如下^[2]:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + h_i \Delta t \sum_{m=1}^q \beta_m \mathbf{f}_{im} \quad (9)$$

其中

$$\mathbf{f}_{im} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{im}, \mathbf{u}_{im}, \tau_{im}) \quad (10)$$

$$\mathbf{x}_{im} = \mathbf{x}_i + h_i \Delta t \sum_{l=1}^q \alpha_{ml} \mathbf{f}_{il} \quad (11)$$

$$\mathbf{u}_{im} = \mathbf{u}(\tau_{im}) \quad (12)$$

$$\tau_{im} = \tau_i + h_i \rho_m \quad (13)$$

$$h_i = \tau_{i+1} - \tau_i \quad (14)$$

这里 $1 \leq m \leq q, i = 0, 1, \dots, N-1, N$ 为时间节点数. α_{ml}, β_m 和 ρ_m 为常数,满足 $0 \leq \rho_1 \leq \dots \leq 1$. 时间节点上的变量 $(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i)$ 必须同时在整个时间区间 $[0, 1]$ 上确定,称为全局变量;而节点之间的变量 $(\mathbf{x}_{im}, \mathbf{u}_{im})$ 位于时间区间 $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ 内,称为局部变量. 为了使最优解满足相容性条件^[6],本文采用经典 4 阶 Runge-Kutta 离散方法. 对于 4 阶 Runge-Kutta 离散方法,设计变量中还需加入 $(\tau_i + \tau_{i+1})/2$ 时刻对应的局部变量 $\mathbf{u}_{i2} = \mathbf{u}_{i3} = \hat{\mathbf{u}}_i$. 定义如下集合:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_0^T \ \dots \ \mathbf{x}_i^T \ \dots \ \mathbf{x}_N^T]^T \quad (15)$$

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_0^T \ \dots \ \mathbf{u}_i^T \ \dots \ \mathbf{u}_N^T]^T \quad (16)$$

$$\hat{\mathbf{U}} = [\hat{\mathbf{u}}_0^T \ \dots \ \hat{\mathbf{u}}_i^T \ \dots \ \hat{\mathbf{u}}_{N-1}^T]^T \quad (17)$$

通过以上离散处理,可将轨迹优化问题转化为如下 NLP 问题:

确定变量

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{X} \ \mathbf{U} \ \hat{\mathbf{U}} \ t_0 \ t_f]^T \quad (18)$$

使得如下性能函数最优:

$$J = F(\mathbf{x}_0, t_0; \mathbf{x}_N, t_f) \quad (19)$$

且满足约束条件

$$\xi_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k - h_k \sum_{j=1}^k \beta_j \mathbf{f}_{kj} = 0 \quad (20)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}_0, t_0; \mathbf{x}_N, t_f) = 0 \quad (21)$$

$$\mathbf{C}[\mathbf{X}, \mathbf{U}, \hat{\mathbf{U}}] \leq 0 \quad (22)$$

对于式(19)~式(22)描述的非线性规划问题,可采用序列二次规划(SQP)算法求解,如求解大规模优化问题的软件包 SNOPT^[9]. 为了提高计算速度,计算过程中利用自动微分软件 Intlab^[10] 计算雅克比矩阵,并采用稀疏矩阵表示法.

2 二代小波节点自适应算法

利用上述 Runge-Kutta 离散方法可将轨迹优

化问题转换为非线性规划问题求解,其优点是节点位置、时间步长可以变化,若可以在优化过程中动态调整节点则可满足一定精度情况下减小节点的数量,提高计算效率. 由于小波系数幅值反应了函数(高阶导数)的局部光滑性,可以基于小波系数幅值的大小进行节点自动调整.

2.1 二代小波

二代小波是提升插值小波的统称,为某些函数空间上的 Reisz 基,同时具有时间和空间局部性和多项式消失矩. 与经典小波相比,可以直接在区间上构造. 由于构造第二代小波的数学推导较为复杂,为了节约篇幅,本文仅给出部分必要的结论.

函数空间 L 上的二代小波多分辨分析 M 由一组闭子空间 $M = \{V^j \subset L \mid j \in J\}$ (j 表示分辨水平) 组成,并满足如下条件:

1) $V^j \subset V^{j+1}$;

2) $\bigcup_{j \in J} V^j$ 在 L 中稠密;

3) 对每个 $j \in J$, 尺度函数 $\{\phi_k^j \mid k \in K^j\}$ 是 V^j 的 Reisz 基(其中 K^j 是指标集).

Sweldens 给出了二代小波变换(second generation wavelets transform, SGWT)的构建方法,并构造了二代小波函数^[11]. 以一维小波为例,二代小波的小波系数 d_k^j 和尺度系数 c_k^j 具有如下正变化关系式:

$$d_k^j = \frac{1}{2} (c_{2k+1}^{j+1} - \sum_l w_{k,l}^j c_{2k+2l}^{j+1}) \quad (23)$$

$$c_k^j = c_{2k+1}^{j+1} + \sum_l \tilde{w}_{k,l}^j d_{k+l}^j \quad (24)$$

其逆变换关系式为

$$c_{2k}^{j+1} = c_k^j - \sum_l \tilde{w}_{k,l}^j d_{k+l}^j \quad (25)$$

$$c_{2k+1}^{j+1} = 2d_k^j + \sum_l \tilde{w}_{k,l}^j c_{k+l}^j \quad (26)$$

式中的 $w_{k,l}^j, \tilde{w}_{k,l}^j$ 是构造提升小波的插值系数,可以通过插值细分原理求取^[11].

2.2 节点自适应算法

Vasilyev 等^[6] 提出了求解偏微分方程的二代小波配点法,包括基于小波的节点自适应方法和自适应节点上的导数计算方法,下面结合轨迹优化问题的求解,简要给出节点自适应方法.

考虑定义在闭区间 $\Omega = [0, 1]$ 上的函数 $f(\tau)$ (可以是控制量或状态量),并在如下二分节点上构造插值小波:

$$G^j = \{\tau_k^j \in \Omega; k \in K^j\}, j \in Z \quad (27)$$

其中节点 τ_k^j 满足嵌套关系: $G^j \subset G^{j+1} (\tau_k^j = \tau_{2k}^{j+1})$.

为了不产生歧义, G^j 中的节点称为背景节点, 只有在小波变换中用到. 根据二代小波构造方法, 控制函数 $u(\tau)$ 可以在分辨率 J 的每个水平上用尺度函数 $\phi_k^j(\tau)$ ($k \in K^j$) 和小波函数 $\psi_l^j(\tau)$ ($l \in L^j$) 表示为

$$u^j(\tau) = \sum_{k \in K^0} c_k^0 \phi_k^0(\tau) + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{l \in L^j} d_l^j \psi_l^j(\tau) \quad (28)$$

小波系数绝对值的大小表示了函数的局部光滑性质, 函数越光滑, 则小波系数越小. 对于局部突变的函数, 其大部分小波系数是足够小的, 仅在函数突变处较大, 因此即使舍去大部分较小的小波系数, 也可以保持对原函数保持较好的近似. 由于尺度函数与背景节点 τ_k^j 唯一对应, 而小波 $\psi_l^j(\tau)$ 与背景节点 $\tau_{2^{j+1}}^j$ 唯一对应, 所以进行小波分解后, 在最精细分辨层 J 上的每个节点要么与小波函数对应要么与尺度函数对应. 因此, 如果相应的小波系数从近似关系式(28)中省略, 则相应的背景节点可以删除, 可得到计算节点 τ_i .

将式(28)改写为两项之和

$$u^j(\tau) = u_{\geq}^j(\tau) + u_{<}^j(\tau) \quad (29)$$

其中

$$u_{\geq}^j(\tau) = \sum_{k \in K^0} c_k^0 \phi_k^0(\tau) + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{l \in L^j, |d_l^j| \geq \epsilon} d_l^j \psi_l^j(\tau) \quad (30)$$

表示小波系数幅值大于某个阈值 ϵ 的部分.

$$u_{<}^j(\tau) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{l \in L^j, |d_l^j| < \epsilon} d_l^j \psi_l^j(\tau) \quad (31)$$

表示小波系数幅值小于某个阈值 ϵ 的部分.

Donoho 给出了方程的截断误差^[12]

$$\|u^j(\tau) - u_{\geq}^j(\tau)\|_{\infty} \leq C_1 \epsilon \quad (32)$$

其中系数 C_1 与函数 $u^j(\tau)$ 相关.

根据小波系数与节点的分层对应关系可以确定最少的自适应节点. 但是根据这些节点上的函数值无法还原全部节点的函数值, 因此还需要稍微扩大自适应节点的范围, 以使得从自适应节点能够恢复函数 $u_{\geq}^j(\tau)$. 一般来讲, 上述过程增加的节点是非常少的.

利用基于小波的节点自适应算法获得新的自适应节点的过程如下:

- 1) 获得控制量 $u_k^j(\tau)$ 在节点 $G_{\geq}^j$ 的函数值;
- 2) 根据式(23)和式(24)执行正向小波变换, 获得尺度系数 c_k^0 ($k \in K$) 和每个分辨率水平上的小波系数 d_l^j ($l \in L, 0 \leq j \leq J-1$);
- 3) 分析小波系数 d_l^j , 建立所有背景节点 τ_k^j

的指标集 L , L 中包含小波系数 $|d_l^j| \geq \epsilon$ 的所有节点及其相邻的小波系数(包括同一分辨水平 j 和下一分辨水平 $j+1$);

4) 在 L 中增加所有尺度系数 c_k^0 ($k \in K$) 对应的节点;

5) 构建新的计算节点 $G_{\geq}^{j+1}$ (即 L), 用于下一步的优化计算.

在自适应节点 $G_{\geq}^j$ 上执行小波变换可以保证所有小波系数与 $u_{\geq}^j(\tau)$ 在背景节点 G^j 进行小波变换然后从自适应节点删除等于 0 的小波系数得到的结果一致.

基于二代小波的节点自适应算法输入参数包括: J_0 , 初始分辨率水平(控制初始节点个数); $J_{\max}$, 最大分辨率水平(控制背景节点个数, 即最小节点间隔); ϵ 为小波系数幅值的阈值. 终止条件: 前后两次节点位置相同或达到预定的迭代次数.

计算流程如下:

1) 根据初始分辨率 J_0 生成均匀节点 G^{J_0} (或 $\{\tau_i\}$), 以及该均匀节点上的状态函数 x 和控制函数 u 的初始猜测;

2) 利用非线性规划算法 SNOPT 优化式(18)~式(22)给出的非线性规划问题, 得到状态函数 x 和最优控制函数 u ;

3) 根据节点自适应算法确定下一步优化的自适应节点, 若存在多个控制函数, 则将这些控制函数分别得到的自适应节点进行合并;

4) 根据前一次优化计算的解 x 和 u , 利用小波插值计算新的自适应节点上的初始猜测, 并进行循环迭代, 直到满足终止条件.

需要说明的是: 小波系数阈值的取值通常凭经验选取, 一般可取为 $\epsilon = \alpha(u_{\max} - u_{\min})$, 对于间断函数, α 可取 $0.005 \sim 0.01$, 对于连续函数, 可取 $0.001 \sim 0.005$.

3 数值算例

3.1 Breakwell 问题

考虑如下 Breakwell 问题^[13]:

目标函数为 $J = 0.5 \int_0^1 u^2 dt$, 状态方程为 $\dot{x}(t) = v(t)$, $\dot{v}(t) = u(t)$, 边界条件为 $x(0) = 0$, $x(1) = 0$, $v(0) = -v(1) = 1$, 状态约束为 $x(t) \leq L$. 该问题的目标函数最优值为 $J = 4/9L$.

对该问题采用小波方法进行节点自适应调整, 取小波系数阈值 $\epsilon = 0.001(u_{\max} - u_{\min})$. 优化的状态初始猜测为初末状态之间的线性函数, 控

制量的初始值为 0。

表 1 给出了不同的 l 取值时,优化的节点数目、目标函数误差 $|J - J^*|$ 以及控制函数误差 $\|u - u^*\|_\infty = \max_i |u_i - u^*(t_i)|$ (为数值解与解析解误差函数的最大值范数)。这里与高斯伪谱法 Matlab 软件包(GPOPS)^[14]进行了对比,计算采用 CPU 为 Intel 双核 1.86 GHz,内存为 1.5 GB 的台式机。从表中可以看出:目标函数误差的量级约为 $10^{-7} \sim 10^{-9}$,控制函数误差最大值范数的量级约为 $10^{-3} \sim 10^{-4}$ 。结果显示:与 GPOPS 相比,本文算法的节点数大约节省 10%,最优指标精度大约提高 1 个数量级,而计算时间相当。

表 1 不同约束下计算精度

Table 1 Comparison of precision and optimality

l	算法	N	$ J - J^* $	$\ u - u^*\ _\infty$	时间/s
0.04	小波	71	9.8×10^{-7}	2.4×10^{-3}	20.2
0.04	GPOPS	85	1.0×10^{-6}	1.9×10^{-2}	21.4
0.08	小波	66	2.2×10^{-8}	7.2×10^{-4}	6.3
0.08	GPOPS	73	1.9×10^{-7}	9.4×10^{-3}	5.7
0.12	小波	59	2.2×10^{-7}	1.1×10^{-4}	5.4
0.12	GPOPS	49	4.2×10^{-6}	2.9×10^{-2}	3.8
0.16	小波	57	2.7×10^{-9}	2.8×10^{-4}	16.9
0.16	GPOPS	61	1.9×10^{-6}	6.1×10^{-3}	17.1

$l = 0.1$ 时的节点自适应过程如图 1 所示,状态函数和控制函数变化曲线分别如图 2 和图 3 所示。图 1 中垂直线为解析解中控制函数导数不连续时间点,迭代所采用的节点个数依次为 33, 45, 57, 63 和 72。从图中可以看出:每次节点调整后更加集中于控制函数导数不连续处,且在两侧都有加密。图 2 中实线为状态量解析解,“*”和“+”分

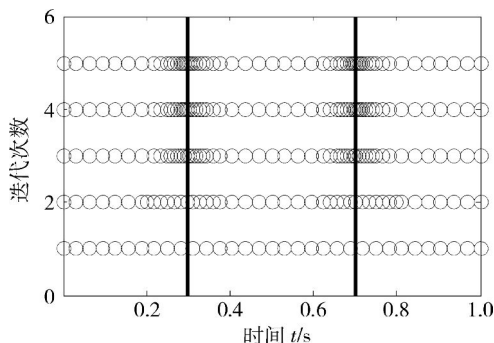


图 1 节点自适应过程($l=0.1$)

Fig. 1 Process of node adaptive ($l=0.1$)

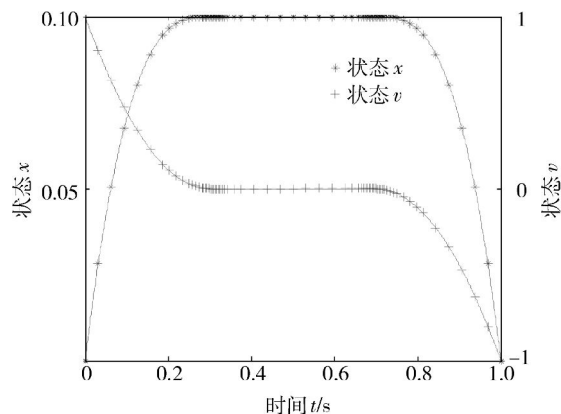


图 2 状态量曲线

Fig. 2 State quantity curve

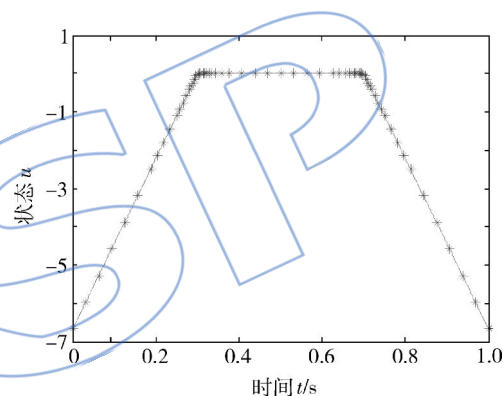


图 3 控制量曲线

Fig. 3 Controlled quantity curve

别为本文算法计算得到的状态 x 和状态 v 。从结果可知,最优解与解析解非常吻合。

文献[5]给出了基于密度函数的节点自适应算法(density function-based mesh refinement algorithm, DENMRA),并给出了该算例的结果。与 DENMRA 相比,基于小波的算法精度稍差,但是比 SOCS(sparse optimal control software)的结果要好。虽然 DENMRA 精度较高,但是需要针对具体问题设计密度函数,对于复杂问题,具有一定的难度,而本文基于小波的节点自适应算法的优势在于只需简单设定小波系数阈值,即可自动在控制函数(或高阶导数)不连续处加密节点。

3.2 航天器姿态机动问题

算例 1 通过与高斯伪谱法对比验证了算法的有效性和精度,同时计算效率与高斯伪谱法相当。为了验证算法处理不连续控制函数的性能以及在工程问题是的适用性,下面利用本文算法求解文献[15]给出的刚体航天器姿态机动问题。采用四元数描述的航天器姿态动力学方程如下:

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= \frac{1}{2}(\omega_1 q_4 - \omega_2 q_3 + \omega_3 q_2) \\
\dot{q}_2 &= \frac{1}{2}(\omega_1 q_3 + \omega_2 q_4 - \omega_3 q_1) \\
\dot{q}_3 &= \frac{1}{2}(-\omega_1 q_2 + \omega_2 q_1 + \omega_3 q_4) \\
\dot{q}_4 &= \frac{1}{2}(-\omega_1 q_1 - \omega_2 q_2 + \omega_3 q_3) \\
\dot{\omega}_x &= [u_1 + (J_y - J_z)\omega_y\omega_z]/J_x \\
\dot{\omega}_y &= [u_2 + (J_z - J_x)\omega_x\omega_z]/J_y \\
\dot{\omega}_z &= [u_3 + (J_x - J_y)\omega_x\omega_y]/J_z \quad (33)
\end{aligned}$$

其中四元数定义如下:

$$\mathbf{q}^T = (q_1, q_2, q_3, q_4) = (\hat{\mathbf{q}}, q_4) \quad (34)$$

其中 $\|\mathbf{q}\| = 1$ (这里为 2 范数). $\boldsymbol{\omega}^T = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]$ 为角速度. 刚体惯量参数使用 NASA XTE (X-ray timing experiment) 航天器参数, 如下:

$$J_x = 5621 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$J_y = 4547 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$J_z = 2364 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

控制力矩约束为

$$|u_i| \leq 50 \text{ N} \cdot \text{m} \quad i = 1, 2, 3 \quad (35)$$

机动目标是使用最短的时间使航天器绕 x 轴转动 150° , 因此取如下边界条件

$$\mathbf{q}^T(0) = [0, 0, 0, 1]$$

$$\mathbf{q}^T(t_f) = \left[\sin \frac{\phi}{2}, 0, 0, \cos \frac{\phi}{2} \right]$$

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(t_f) = 0 \quad (36)$$

采用基于二代小波的节点自适应算法进行优化, 计算中小波系数阈值取 $\epsilon_i = 0.005(u_{\max} - u_{\min})$, 其中 $i = 1, 2, 3$. 经过 8 次节点调整, 最终保留 187 个节点. 计算硬件与算例 1 相同. 最优机动时间为 28.6304 s, 与文献结果一致. 图 4 是控制量曲线, 图 5 是四元数曲线, 图 6 是角速度曲线, 图 7 是节点自适应过程中节点位置图. 需要说明的是: 对于该问题, 控制量维数为 3, 且相互独立, 在进行节点自适应过程中, 对 3 个控制量分别计算需要的节点, 最后将节点合并, 因此会出现在第 1 个控制量光滑处存在节点加密情况.

从优化结果可以看出: 基于二代小波的节点自适应算法在控制函数突变处进行了合理加密, 提高了对控制函数逼近的精度. 由于大部分节点分布在控制函数间断处, 可提高控制开关处的精度, 而在其他区域则可用较少节点. 结果说明本文算法可用于具有多个控制函数、多个开关的复杂 Bang-Bang 控制问题的节点自适应. 对于该类问

题, 若节点个数较多, 可适当增大小波系数阈值.

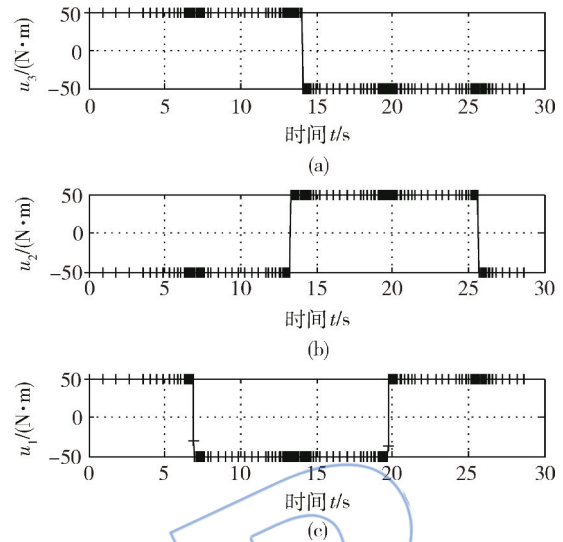


图 4 最优控制曲线

Fig. 4 Optimum control curve

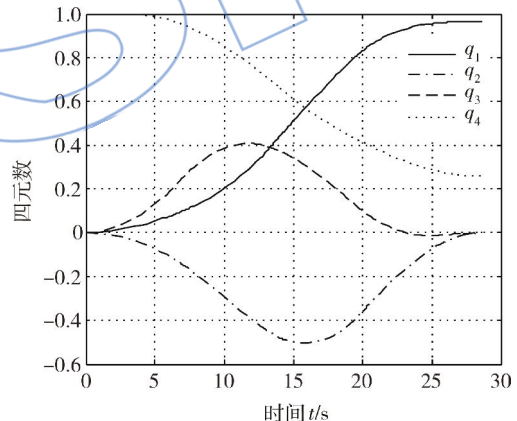


图 5 四元数曲线

Fig. 5 Quaternion curve

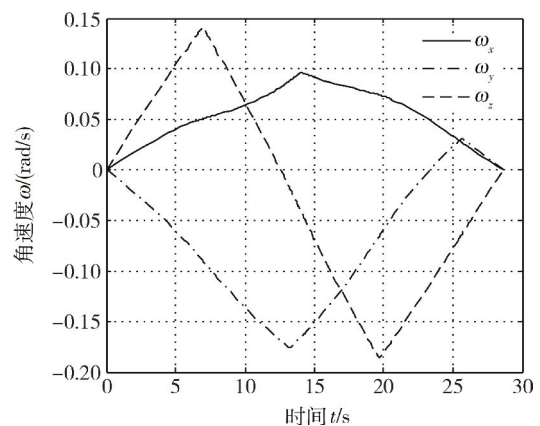


图 6 角速度曲线

Fig. 6 Angular velocity curve

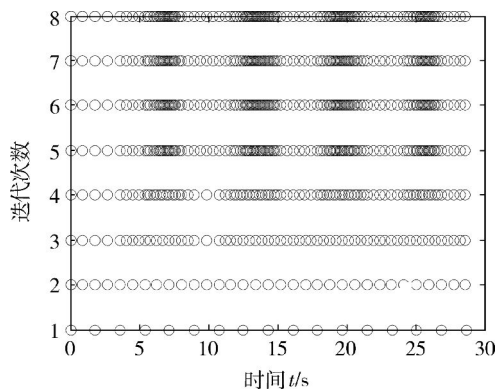


图7 节点自适应过程

Fig. 7 Process of node adaptive

4 结 论

本文将基于二代小波的节点自适应算法应用于轨迹优化问题。针对复杂非线性和复杂约束轨迹优化问题,采用 Runge-Kutta 离散方法将轨迹优化问题转化为非线性规划问题,并利用非线性规划算法进行求解。在每次优化完成之后,利用小波自适应算法自动计算下一次优化使用的非均匀节点,依次进行序列优化直到满足终止条件。最后,对 Breakwell 问题进行了求解,并与 GPOPS 做了对比,结果说明本文算法的最终节点数量节省大约 10%、精度大约提高 1 个数量级、计算效率相当;对刚体航天器姿态机动问题优化计算的结果表明本文算法具有较强的适用性,对工程应用具有一定的参考价值。

参考文献:

- [1] 雍恩米,陈磊,唐国金.飞行器轨迹优化数值方法综述[J].宇航学报,2008,29(2):397-406.
YONG Enmi, CHEN Lei, TANG Guojin. A survey of numerical methods for trajectory optimization of spacecraft[J]. Journal of Astronautics, 2008, 29(2): 397-406. (in Chinese)
- [2] Betts J T. Practical methods for optimal control using nonlinear programming[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.
- [3] Ross I M, Fahroo F. Pseudospectral knotting methods for solving optimal control problems[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2004, 27(3): 397-405.
- [4] Darby C L, Hager W, Rao A V. An hp-adaptive pseudospectral method for solving optimal control problems[J]. Optimal Control Applications and Methods, 2011, 32(4): 476-502.
- [5] Zhao Y, Tsotras P. Density functions for mesh refinement in numerical optimal control[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2011, 34(1): 271-277.
- [6] Vasilyev O V, Bowmany C. Second-generation wavelet collocation method for the solution of partial differential equations[J]. Journal of Computational Physics, 2000, 165(2): 660-693.
- [7] Betts J T. Survey of numerical methods for trajectory optimization[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1998, 21(2): 193-207.
- [8] Hager W. Runge-Kutta methods in optimal control and the transformed adjoint system[J]. Numerische Mathematik, 2000, 87(2): 247-82.
- [9] Gill P E, Murray W, Saunders M A. SNOPT: an SQP algorithm for large-scale constrained optimization[D]. San Diego: University of California, 1997.
- [10] Rump S M. INTLAB-INTERVAL LABORATORY[C]//Csendes T. Developments in reliable computing. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999: 77-104.
- [11] Sweldens W. The lifting scheme: a construction of second generation wavelets[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1998, 29(2): 511-546.
- [12] Donoho D L. Interpolating wavelet transforms[R]. Stanford: Department of Statistics, Stanford University, Technical Report 408, 1992.
- [13] Bryson A E, Yu-Chi H. Applied optimal control[M]. New York: Taylor & Francis Group, 1975.
- [14] Rao A V, Benson D A, Darby C L, et al. Algorithm 902: GPOPS, a MATLAB software for solving multiple-phase optimal control problems using the Gauss pseudospectral method[J]. ACM Transactions on Mathematical Software, 2010, 37(2): 1-39.
- [15] Fleming A, Sekhvat P, Ross I M. Minimum-time reorientation of an asymmetric rigid body [R]. AIAA-2008-7012, 2008.